

Toetsingsregels voor stalen bogen (2)

De Nederlandse normen kennen geen speciale toetsingsregels om na te gaan of een stalen boog bij een gegeven belasting voldoende sterk, stijf en stabiel is. Voor de technische commissie 'Stabiliteit' van het Staalbouwkundig Genootschap was dat in 1996 reden een onderzoek te starten naar het constructieve gedrag van bogen. Het eerste resultaat waren toetsingsregels voor de stabiliteit van de boog in het vlak¹. Een vervolgonderzoek richtte zich op de stabiliteit uit het vlak van de boog. Voor cirkelvormige bogen belast op zuiver buiging of zuivere druk lukte het toetsingsregels op te stellen.



Architecten gebruiken de boog steeds vaker als constructief element in hun ontwerpen. De architectonische uitstraling van een boog is hiervoor een belangrijke reden. Daarnaast maken computerprogramma's het steeds gemakkelijker om gebogen vormen toe te passen in het ontwerp en nemen ook de technische mogelijkheden toe om deze vormen te fabriceren.

Hoewel de stalen boog als constructieelement al lang in gebruik is, kennen de huidige normen geen toetsingsregels voor stalen bogen. Elke constructeur ontwerpt en toetst een boog geheel op eigen inzicht. Het is echter de vraag of dat op een veilige manier gebeurt.

In 1996 startte technische commissie SG/TC8 (Stabiliteit) van het Staalbouwkundig Genootschap een onderzoek, gericht op het afleiden van eenvoudige toetsingsregels voor bogen. Het eerste deel van het onderzoek beschreef de stabiliteit in het vlak van de boog². Het vervolgonderzoek, waarvan dit artikel een samenvatting geeft, heeft betrekking op de stabiliteit uit het vlak van de boog³.

Eerst wordt de elastische kniklast bekeken die betrekking heeft op knik uit het vlak van de boog. Dit gebeurt aan de hand van een vergelijking tussen het elastisch knikken van een kolom (in dat geval spreken we van Eulerse kniklast) en het elastisch knikken van een boog. Daarna wordt de vergelijking tussen een boog en een kolom voortgezet bij het voorstel van de toetsing van stabiliteit uit het vlak van de boog. Vervolgens wordt de voorgestelde toetsing geverifieerd.

Elastische kniklast

Voor het berekenen van de stabiliteit van een kolom is de Eulerse kniklast een effectieve hulpgrootheid. De Eulerse kniklast geeft op relatief eenvoudige wijze de grootte van de drukkracht waarbij een perfecte kolom met een elastisch materiaalgedrag en geometrisch niet-lineair gedrag worden bij de berekening van de Eulerse kniklast echter buiten beschouwing gelaten.

Voor een boog is een soortgelijke berekening te maken. De belasting waarbij een perfecte boog elastisch uit zijn vlak knikt, wordt hier aangeduid met de meer algemene term 'elastische kniklast'.

De stabiliteit van een boog is goed vergelijkbaar met die van een kolom (tabel 1). Niettemin is het voor een boog gecompliceerder om de Eulerse kniklast te bepalen dan voor een kolom. Door de geometrie van de boog zijn de evenwichtsvergelijkingen namelijk complexer en naast de zijdelingse stijfheid spelen ook de torsiestijfheid en de welvingsstijfheid een rol. Voor een kolom is het nog eenvoudig het evenwicht van krachten en momenten op te stellen en de resulterende differentiaalvergelijking op te lossen. Voor een boog is dat lastiger.

Vanaf de tweede helft van deze eeuw hebben verschillende onderzoekers geprobeerd deze elastische kniklast voor een boog analytisch te beschrijven. Dat leverde een aantal sterk uiteenlopende modellen⁴⁻⁹ op die zich alle beperken tot cirkelvormige bogen belast op zuivere druk of op zuivere buiging. De modellen hebben bovendien als oplegging een gaffeloplegging, waarbij één

mw.ir. S.F. Delrue

Witteveen+Bos Raadgevende ingenieurs, Amsterdam

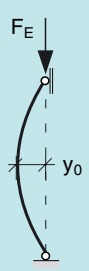
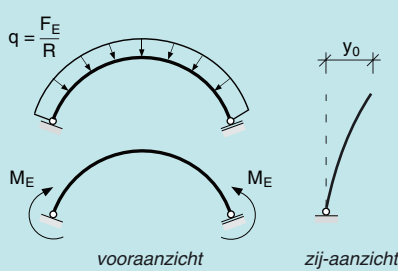
prof.ir. H.H. Snijder

*TU Eindhoven, Faculteit Bouwkunde
en Holland Railconsult, Utrecht*

ir. F.S.K. Bijlaard en ir. H.M.G.M. Steenbergen

TNO Bouw, Rijswijk

Tabel 1. Vergelijking toetsing van de stabiliteit van een kolom en een boog

criterium	kolom	boog uit het vlak
knikvorm		
kniklast	$F_E = \frac{\pi^2 E I_z}{l_{buc}^2}$	$F_E = \beta_{red} \frac{M_0}{R^2} \left(\frac{b(a^2 - 1)^2}{a^2 + b^2} \right)$ $M_E = \beta_{red} M_0 \left(-\frac{a}{b} - \frac{ab}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{ab}{2} \right)^2 + 1 - a^2} \right)$ $a = \frac{L}{\pi R}; \quad b = \frac{\pi M_0}{P_z L}; \quad P_z = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2} \quad \text{en} \quad M_0 = \sqrt{P_z \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_{wa}}{L^2} \right)}$
toetsing	$\frac{N_{C;S;d}}{\omega_{y;buc} N_{C;U;d}} \leq 1$	$\frac{N_{C;S;d}}{\omega_{arch;out} N_{C;U;d}} \leq 1$ en $\frac{M_{y;S;max;d}}{\omega_{arch;out} M_{y;U;d}} \leq 1$

van de twee opleggingen in radiale richting kan bewegen.

Het model van Rajasekaran⁸ blijkt het meest geschikt als basis voor een toetsing (zie tabel 1). Dit model geeft betrouwbare resultaten en de schrijfwijze van de elastische kniklast is eenvoudiger dan die van de andere modellen.

Voor cirkelvormige bogen belast op zuiver druk is de elastische kniklast met de volgende formule te bepalen:

$$F_{E,Raj} = \beta_{red} \frac{M_0}{R^2} \left(\frac{b(a^2 - 1)^2}{a^2 + b^2} \right)$$

Voor cirkelvormige bogen belast op zuivere buiging volgt de elastische kniklast uit:

$$M_{E,Raj} = \beta_{red} M_0 \left(-\frac{a}{b} - \frac{ab}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{ab}{2} \right)^2 + 1 - a^2} \right)$$

In tabel 1 is I_t de torsiestijfheid, I_{wa} de welvingstijfheid, L de lengte van de boog en R de straal van de boog.

Voorstel toetsingsregel

De toetsing van bogen is zoveel mogelijk gelijklopend aan die van kolommen. Daardoor sluit de nieuwe toetsing goed aan bij de huidige normen en is deze in de praktijk eenvoudig toe te passen. De toetsing van de stabiliteit van een op druk belaste kolom volgens NEN 6770 luidt:

$$\frac{N_{C;S;d}}{\omega_{y;buc} N_{C;U;d}} \leq 1$$

Hierin is:

$N_{C;S;d}$ rekenwaarde van de drukkracht door de belasting;

$N_{C;U;d}$ rekenwaarde van de normaal-drukkracht met betrekking tot de uiterste capaciteit in de uiterste grenstoestand;

$\omega_{y;buc}$ knikfactor voor stabiliteit om de y-as, afhankelijk van de relatieve slankheid van de kolom.

In deze toetsingsregel wordt de rekenwaarde van de belasting getoetst aan de (door stabiliteit) gereduceerde capaciteit van de doorsnede. De knikfactor $\omega_{y;buc}$ is namelijk altijd gelijk aan of kleiner dan 1. De capaciteit van de doorsnede moet worden gereduceerd, wanneer een kolom gevoelig is voor knik. Deze gevoeligheid is gekoppeld aan de slankheid van de kolom. Hoe slanker de kolom is, des te gevoeliger is de kolom voor knik en des te kleiner is de knikfactor.

Voor een boog kan de toetsing van de stabiliteit op dezelfde manier worden uitgevoerd als voor een kolom (rij 3 in tabel 1). De rekenwaarde van de belasting wordt getoetst aan de rekenwaarde van de gereduceerde capaciteit van de doorsnede van de boog. Hoe gevoeliger de boog is voor knik, des te meer moet de capaciteit van de doorsnede worden gereduceerd. De gevoeligheid voor knik uit het vlak van een boog is ook hier gerelateerd aan de slankheid van de boog.

Een probleem bij deze toetsingsmethode is echter dat er geen knikcurven voor bogen beschikbaar zijn. Voor kolommen zijn veel proeven gedaan om de uiterste capaciteit van kolommen te bepalen.

Deze proefresultaten zijn verwerkt en in knikcurven weergegeven (zie grafiek).

Maar voor bogen zijn deze proefresultaten niet voorhanden. Een dure en tijdrovende optie is om voor bogen knikcurven te bepalen via experimenten of computersimulaties. Er is voor een andere aanpak gekozen en onderzocht of de bestaande knikcurven voor kolommen bruikbaar zijn voor bogen. Uit het eerste onderzoek naar de stabiliteit in het vlak van de boog¹ was namelijk gebleken dat de kolomknikcurven bruikbaar zijn voor knik in het vlak van de boog.

Voor cirkelvormige bogen is voor twee belastinggevallen de toetsing van de stabiliteit uit het vlak van de boog bepaald. Voor bogen onder zuivere druk geldt:

$$\frac{N_{C;S;d}}{\omega_{arch;out} N_{C;U;d}} \leq 1$$

en voor bogen onder zuivere buiging:

$$\frac{M_{y;S;max;d}}{\omega_{arch;out} M_{y;U;d}} \leq 1$$

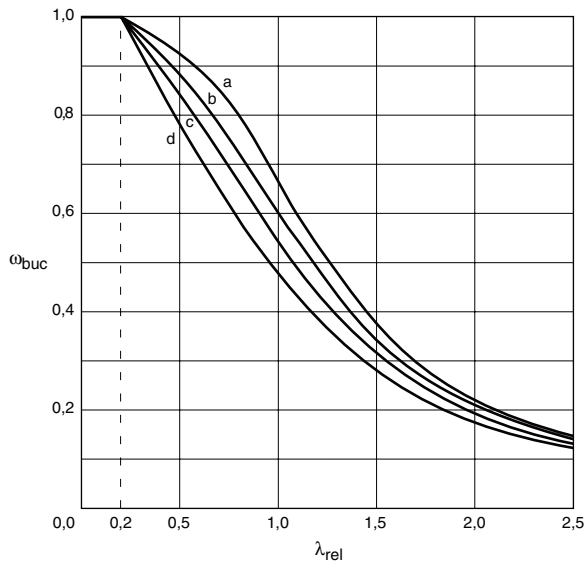
De knikfactor $\omega_{arch;out}$ wordt bepaald aan de hand van de kolomknikcurven. Om deze curven te kunnen gebruiken, moet de relatieve slankheid van de boog bekend zijn.

Voor zuivere druk, respectievelijk zuivere buiging, is die slankheid als volgt gedefinieerd:

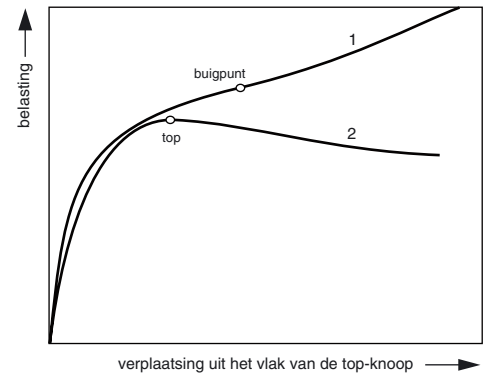
$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{N_{C;U;d}}{F_E}} \quad \text{en} \quad \lambda_{rel} = \sqrt{\frac{M_{C;U;d}}{M_E}}$$

De elastische kniklast, die bekend moet zijn om de relatieve slankheid te bepalen, is gebaseerd op het model van Rajasekaran. De complete toetsing staat in tabel 1.

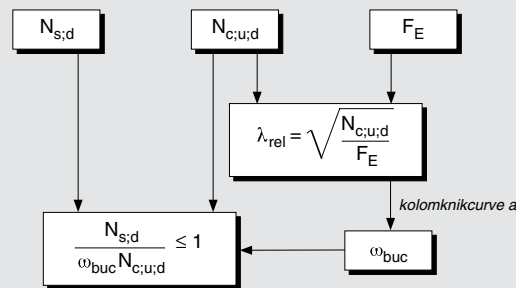
Knikcurven voor kolommen.



Lastverplaatsings-curven volgens een niet-lineaire analyse.



Toetsing stabiliteit uit het vlak van de boog



Voor een cirkelvormige boog belast op zuivere druk kan de toetsing volgens bovenstaand schema worden uitgevoerd. De elastische kniklast voor dit belastings geval is F_E .

$$F_E = \beta_{red} \frac{M_0}{R^2} \left(\frac{b}{a} (a^2 - 1)^2 \right)$$

Hierin is:

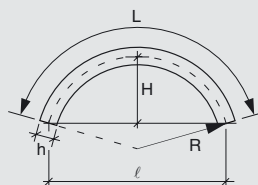
$$a = \frac{L}{\pi R} \quad M_0 = \sqrt{P_z \left(G_t + \frac{\pi^2 E I_{wa}}{L^2} \right)}$$

$$b = \frac{\pi M_0}{P_z L} \quad \beta_{red} = 1 \quad \text{voor } \frac{Hh}{\ell L} \leq 0,25$$

$$P_z = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2} \quad \beta_{red} = 1,05 - 0,2 \frac{Hh}{\ell L} \quad \text{voor } \frac{Hh}{\ell L} > 0,25$$

De parameters van de boog zijn:

- R straal van de boog;
- L ontwikkelde lengte langs de boog;
- ℓ overspanning van de boog;
- H pijl van de boog;
- h hoogte van de doorsnede.



Voor een cirkelvormige boog belast op zuivere buiging kan hetzelfde principe van toetsen worden gehanteerd. In dat geval moet de rekenwaarde van de drukkracht wordt vervangen door de rekenwaarde van het buigend moment en de capaciteit van de doorsnede worden gerelateerd aan het moment. De elastische kniklast M_E voor dit belastingsgeval is:

$$M_E = \beta_{red} M_0 \left(-\frac{a}{b} - \frac{ab}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{ab}{2} \right)^2 + 1 - a^2} \right)$$

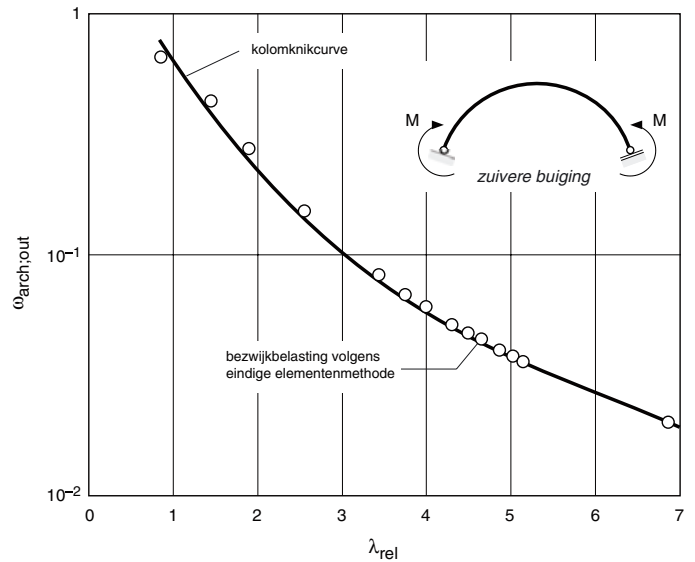
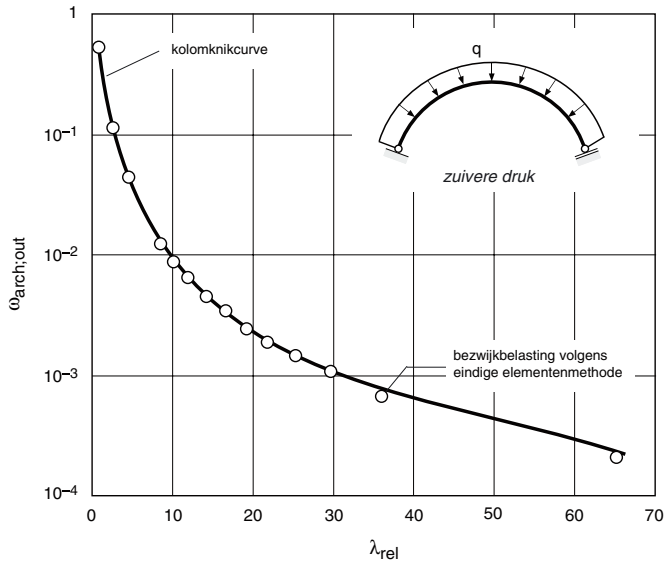
Verificatie toetsingsregel

Voor de verificatie van de toetsingsregels zijn een aantal cirkelvormige bogen berekend. De bezwijkbelastingen van dit numeriek onderzoek zijn vergeleken met de maximale toelaatbare belastingen volgens de toetsingsregels. Het numeriek onderzoek bestaat uit niet-lineaire eindige elementen analyses met het eindige elementenpakket DIANA. Het eindige elementenmodel van de boog is opgebouwd uit gekromde schaalementen. Met deze elementen wordt namelijk de invloed van verhinderde werving in rekening gebracht, wat met eenvoudige balkelementen niet kan.

Om de bezwijkbelasting van de bogen te bepalen, zijn geometrisch en fysisch niet-lineaire analyses uitgevoerd. De invloed van de vervormingen tijdens het belasten en de invloed van het plastisch gedrag worden op deze manier in rekening gebracht. Om het werkelijke gedrag van de boog zo goed mogelijk te modelleren, zijn in het boogmodel naast restspanningen ook begin-imperfecties aangebracht.

De resultaten van de analyses laten zien dat de veel toegepaste, relatief slanke bogen een positief na-kritisch gedrag bezitten. Dit betekent dat de boog na het knikken nog een zekere stijfheid bezit en dat de belasting toe kan nemen na het zijdelings uitknikken. Dit positief na-kritisch gedrag gaat echter wel gepaard met grote vervormingen. In bovenstaande afbeelding is dit aangegeven met curve 1. Curve 2 geeft het gedrag weer van een boog zonder positief na-kritisch gedrag. Dit zijn in het algemeen relatief gedrongen bogen.

Voor de praktijk is het positief na-kritisch gedrag gunstig, omdat de boog zeer sterk zal vervormen; de constructie waarschuwt als het ware voordat hij bezwijkt. Voor het onderzoek naar de stabiliteit van stalen bogen betekent het ech-



ter dat het lastig is vast te stellen wat de bezwijkbelasting in zo'n geval is.

Na een onderzoek van vijf opties voor de bezwijkbelasting blijkt de volgende definitie het meest geschikt. De bezwijkbelasting van de boog is de belasting die hoort bij het punt in het last-verplaatsingsdiagram gedefinieerd door:

$$\min \left| \frac{d(\text{belasting})}{d(\text{verplaatsing top van de boog})} \right|$$

Voor slanke bogen met een positief na-kritisch gedrag is dit het buigpunt en voor gedrongen bogen zonder positief na-kritisch gedrag is dit de top van de last-verplaatsingscurve.

In twee grafieken zijn de bezwijklasten volgens de eindige elementenanalyses weergegeven door middel van witte stippen. Dit zijn de bezwijkbelastingen voor bogen met verschillende afmetingen en verschillende doorsneden. De getrokken lijn is de kolomknikcurve voor gewalste profielen volgens NEN 6770 (curve a). Voor beide belastinggevallen – zuivere druk en zuiver buiging – blijken de bezwijkbelastingen van de bogen goed overeen te komen met die volgens de kolomknikcurve.

Relatieve slankheid

Uit het onderzoek blijkt dat de kolomknikcurve a goed bruikbaar is voor de toetsing van de stabiliteit van cirkelvormige bogen. Er is echter een opmerkelijk verschil tussen kolommen en bogen. De relatieve slankheid heeft voor bogen over het algemeen een veel grotere waarde dan voor kolommen. Neem bijvoorbeeld een boog met een lengte van 10 m, een straal van 7 m en een IPE 600 als doorsnede. De relatieve slankheid voor deze boog voor het belastinggeval zuivere druk bedraagt $\lambda_{rel} = 9,8$. Een kolom onder druk met dezelfde doorsnede

en eveneens een lengte van 10 m heeft een relatieve slankheid van $\lambda_{rel} = 2,26$. Dit is al een groot verschil, maar voor bogen zijn relatieve slankheden van 40 of meer niet uitzonderlijk.

De relatieve slankheid van een boog hangt sterk af van de belasting op de boog. Voor de twee onderzochte belastinggevallen zijn dezelfde bogen gebruikt, namelijk cirkelvormige bogen met een profiel variërend van IPE 100 tot IPE 600, een lengte tussen de 1,25 m en de 10 m en een straal van 7 m of 5 m. Voor het belastinggeval zuivere druk varieert de relatieve slankheid tussen 1 en 65. Voor het belastinggeval zuivere buiging varieert de relatieve slankheid tussen 0,8 en 7. Voor kolommen hangt de relatieve slankheid ook wel van de belasting af, maar zo'n groot verschil als bij bogen is bij kolommen niet aanwezig. In de praktijk dient men er dus rekening mee te houden dat de relatieve slankheid voor een boog zeer groot kan zijn.

Gedrongen bogen

In een recent onderzoek van Pi en Trahair¹⁰ worden zeer gedrongen bogen onderzocht met betrekking tot de stabiliteit uit het vlak. Dit onderzoek kan als aanvulling worden gezien op het onderzoek dat in dit artikel wordt gepresenteerd onderzoek³. De zeer gedrongen bogen met een relatieve slankheid tot 2,5 blijken geen positief na-kritisch gedrag te bezitten. Deze bogen blijken echter ook op overeenkomstige wijze als besproken in dit artikel te kunnen worden getoetst.

Vervolgonderzoek

Voor cirkelvormige bogen met een gaffeloplegging onder zuivere druk of zuivere buiging zijn twee toetsingsregels bepaald om de stabiliteit uit het vlak van de boog te toetsen. Er bestaan echter vele andere vormen van bogen, opleg-

gingen en belastinggevallen. Voor die andere boogvormen, opleggingen en belastinggevallen is het moeilijk analytisch de elastische kniklast vast te stellen. Vooral bij bogen met een ingewikkelde vorm of een sterk afwijkende belasting zal de elastische kniklast op numerieke wijze, bijvoorbeeld met een eindige elementenberekening, moeten worden verkregen.

Voor het belastinggeval waarbij zuivere druk gecombineerd wordt met zuivere buiging, is de elastische kniklast relatief eenvoudig te bepalen. Op grond hiervan is een voorstel gedaan voor de toetsing van cirkelvormige bogen belast op zuivere druk en zuivere buiging. Dit voorstel behoeft echter nog verificatie.

Literatuur

1. I. Verstappen, H.H. Snijder, F.S.K. Bijlaard en H.M.G.M. Steenbergen, 'Toetsingsregels voor stalen bogen', *Bouwen met staal* 141 (1998), p. 49-53.
2. I. Verstappen, *Toetsingsregels voor stalen bogen*, TNO rapport 96-CON-R0623/01, Rijswijk 1996.
3. S.F. Delrue, *Out-of-plane stability of steel arches*, TNO rapport 98-CON-R0498, Rijswijk 1998.
4. S.P. Timoshenko en J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, 1961 (2e druk).
5. V.Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, uitgave National Science Foundation, Washington 1961 (2e druk).
6. C.H. Yoo, 'Flexural-torsional stability of curved beams', *Journal of the Engineering Mechanics Division* 108 (1982) 6, p. 1351-1369.
7. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, 'Flexural-torsional buckling of arches', *Journal of Structural Engineering* 113 (1987) 4, p. 889-905.
8. S. Rajasekaran en S. Padmanabhan, 'Equations of curved beams', *Journal of Engineering Mechanics* 115 (1989) 5, p. 1095-1110.
9. Y.B. Yang en S.R. Kuo, 'Static stability of curved thin-walled beams', *Journal of Engineering Mechanics* 112 (1986) 8, p. 821-841.
10. Y.L. Pi en N.S. Trahair, 'Out-of-plane inelastic buckling and strength of steel arches', *Journal of Structural Engineering* 124 (1998) 2, p. 174-183.

Verificatie van de toetsingsregels.