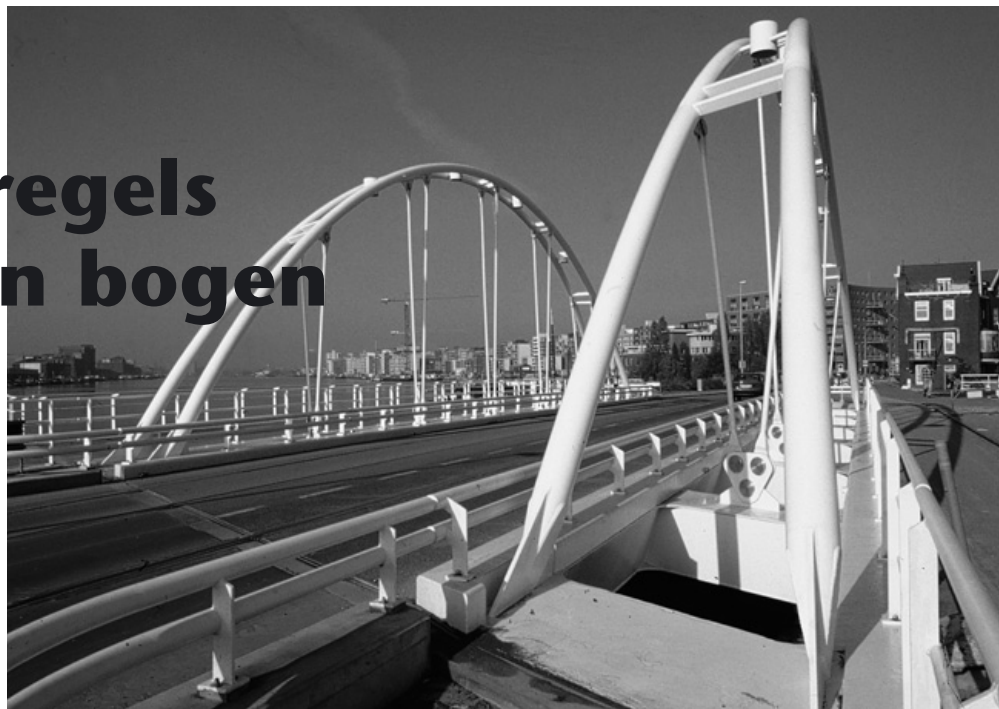


# Toetsingsregels voor stalen bogen



De huidige Nederlandse normen voorzien niet in toetsingsregels om na te gaan of een stalen boog bij een gegeven belasting voldoende veilig en bruikbaar is.

Ook in buitenlandse normen is daarover weinig te vinden. Toch worden stalen bogen in de praktijk vaak toegepast. Voor de technische commissie 'Stabiliteit' van het Staalbouwkundig Genootschap was dat reden onderzoek te verrichten naar knik in het vlak van de boog.

Het resultaat is een voorstel voor toetsingsregels voor wat betreft stijfheid, sterkte en stabiliteit. Een samenvatting.

**mw.ir. I. van der Bij-Verstappen**  
*Adviesbureau Duisters, Eindhoven*

**prof.ir. H.H. Snijder**  
*TU Eindhoven, Faculteit Bouwkunde  
en Holland Railconsult, Utrecht*

**ir. F.S.K. Bijlaard en ir. H.M.G.M. Steenbergen**  
*TNO Bouw, Rijswijk*

Stalen bogen worden steeds vaker gebruikt als constructief systeem. Deze stijgende populariteit is vooral te danken aan de architectonische uitstraling. Daarnaast raken ook steeds meer ontwerpers bekend met de techniek om bijvoorbeeld profielen te buigen of uit plaatmateriaal gebogen vormen te maken. Ook het gebruik van steeds snellere computers en ontwerp pakketten zorgen er voor dat gekromde constructies tegenwoordig net zo makkelijk zijn te ontwerpen als rechte constructies.

Bogen zijn in allerlei soorten bouwwerken te vinden, zoals bruggen, daken en (perron)overkappingen. Meestal worden ze als verticaal dragend element gebruikt, maar ook in het horizontale vlak komen ze voor, denk bijvoorbeeld aan luifels.

Een probleem tot nog toe is dat de huidige Nederlandse voorschriften niet toepasbaar zijn op bogen en dat elke constructeur een boogconstructie naar eigen inzicht ontwerpt. Het ontbreken van toetsingsregels voor stalen bogen was voor technische commissie SG/TC8 (Stabiliteit) van het Staalbouwkundig Genootschap reden voor onderzoek. In eerste instantie is gekeken naar knik in het vlak van de boog. Dit artikel geeft een samenvatting; een meer uitgebreide verantwoording is te vinden in het onderzoeksrapport<sup>1</sup>. In een vervolgstudie wordt gekeken naar de stabiliteit uit het vlak van de boog.

## Classificatie

Afhankelijk van de belasting, de geometrie en de randvoorwaarden is een boog gevoelig voor één of meerdere bezwijkvormen. Om boogvormige constructies te kunnen analyseren, is het nodig om bogen te classificeren. Daarbij wordt een

onderscheid gemaakt in:

- Cirkelvormige of niet-cirkelvormige bogen.
- Bogen belast in het vlak van de boog of belast in en uit het vlak van de boog. In het laatste geval treedt altijd torsie op, zodat instabiliteit in het vlak van de boog vaak niet maatgevend is.
- Een enkele, vrijstaande boog of verschillende, gekoppelde bogen naast elkaar. Het ligt voor de hand dat vrijstaande bogen gevoeliger zijn voor instabiliteitsverschijnselen uit het vlak dan gekoppelde boogconstructies.
- Enkelvoudige of samengestelde bogen, afhankelijk van de opbouw van de dwarsdoorsnede. Voor samengestelde bogen is het plaatselijk bezwijken door knikken van deelstaven – voordat een volledig bezwijkmechanisme is ontwikkeld – vaak maatgevend.
- Flauwe bogen met en zonder gevaar voor doorslag, afhankelijk van de pijl van de boog en de overspanning.

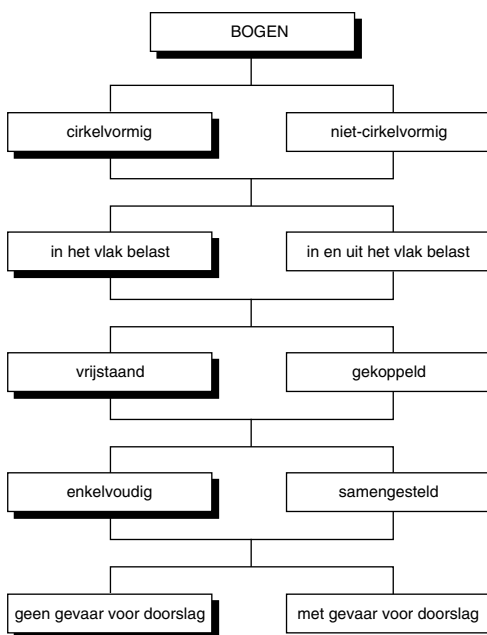
## Stijfheid

De bruikbaarheid van een constructie hangt onder meer af van de vervormingen en trillingen door de belasting. Voor de toetsing van de bruikbaarheid van een stalen boog kunnen de eisen worden gehanteerd die voor elke constructie gelden (zie NEN 6702, hoofdstuk 10). Op dit punt is geen nader onderzoek verricht.

## Sterkte

De toetsing van de sterkte van een constructie(onderdeel) heeft betrekking op de capaciteit van de doorsnede om de optredende krachten over te kunnen dragen. De toetsing van de sterkte in NEN 6770 en NEN 6771 is dan ook een doorsnedetoetsing.

Tussenkap Amsterdam CS: een voorbeeld van een samengestelde boog.



Classificatie van stalen bogen.

De spanningsverdeling over de hoogte van de doorsnede van cirkelvormige bogen is door Timoshenko en Goodier<sup>2</sup> afgeleid voor bogen die worden belast op zuivere druk en voor bogen belast op zuivere buiging. Het spanningsverloop over de doorsnede van een boog wijkt verwaarloosbaar af van de spanningsverdeling over de doorsnede van een rechte ligger, mits de hoogte van de doorsnede niet groter is dan 20% van de straal tot de onderzijde van de boog. Als aan deze voorwaarde wordt voldaan, is het acceptabel de doorsnede van bogen te toetsen conform de toetsingsregels in hoofdstuk 11 van NEN 6770 respectievelijk NEN 6771. Verder gelden dezelfde aannamen als voor rechte staven, zoals de voorwaarde dat de geometrie zodanig is dat de liggertheorie geldt.

### Stabiliteit

Instabiliteit is het verschijnsel dat een op druk en/of buiging belaste constructie bezwijkt door een onevenredige toename van de vervorming ten opzichte van de belastingtoename. Bij bogen kunnen verschillende vormen van instabiliteit optreden.

- *Knik in het vlak van de boog.* Deze vorm van instabiliteit komt overeen met knik ten gevolge van druk of druk en buiging bij kolommen.
- *Doorslag.* Dit is een specifiek fenomeen voor bogen met een kleine verhouding tussen de pijl en de overspanning. Dit fenomeen ontstaat doordat de booglengte afneemt ten gevolge van de normaaldrukkracht. Hierdoor neemt de doorbuiging toe en slaat de boog bij een bepaalde belasting door naar de inverse vorm. In tegenstelling tot de andere instabiliteitsvormen is bij deze vorm van

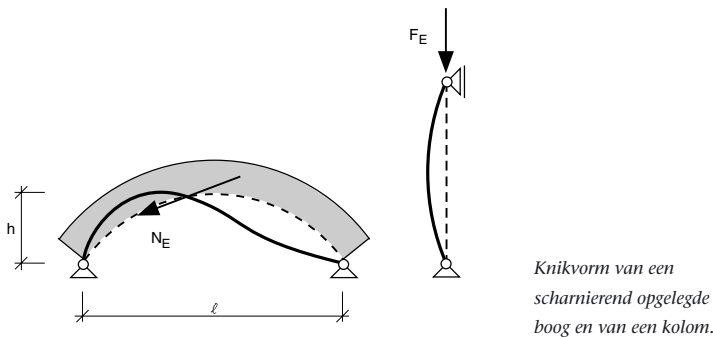
instabiliteit de vervorming door normaalkrachten niet te verwaarlozen.

- *Torsie-instabiliteit.* Dit is het opwikkelven om de lengte van de boog. Deze vorm van instabiliteit kan theoretisch uitsluitend optreden indien de zijdelingse verplaatsing over de gehele lengte van de boog is verhinderd<sup>3</sup>.
- *Kip-instabiliteit.* Bij op zuivere buiging belaste bogen ontstaat kip-instabiliteit door een combinatie van zijdelingse uitbuiging en torderen<sup>3-6</sup>.
- *Torsieknik.* Voor een op zuivere druk belaste boog is behalve knik en torsie-instabiliteit ook een combinatie van beide fenomenen mogelijk. Voor op druk en buiging belaste bogen is op vergelijkbare wijze een combinatie van knik en kip mogelijk. In beide gevallen spreekt men van torsieknik<sup>4,5,7,8</sup>.

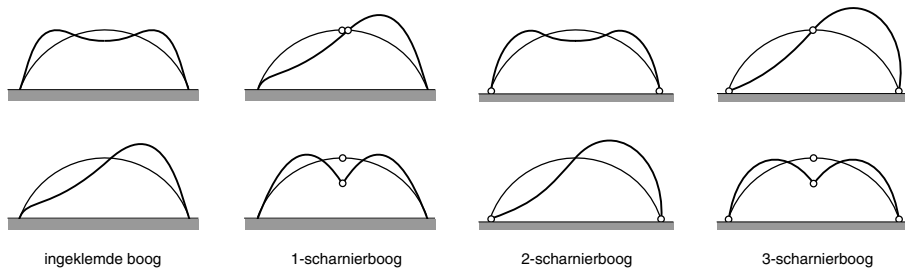
Opgemerkt wordt dat knik uit het vlak van de boog niet zelfstandig voor, omdat een bij een boog verplaatsing uit het vlak altijd gepaard gaat met een rotatie. Om het onderzoeksgebied te beperken, is gekozen voor de instabiliteitsvorm van knik in het vlak van de boog. Hierbij is uitgegaan van een boog waarbij doorslag niet optreedt en de verplaatsing uit het vlak voldoende is verhinderd. Verder is de onderzochte stalen boog te classificeren als cirkelvormig, vrijstaand, enkelvoudig, uitsluitend in het vlak belast en scharnierend aan beide voeten opgelegd. De laagste eigenwaarde is maatgevend; de knikvorm die daar bij hoort is de asymmetrische knikvorm.

### Simulatie van het gedrag

Om inzicht te krijgen in het instabiliteitsgedrag van de onderzochte boog (cirkelvormig, vrijstaand, enkelvoudig en



*Knikvorm van een scharnierend opgelegde boog en van een kolom.*



*Verskillende knikvormen in het vlak van de boog.*

scharnierend opgelegd) zijn simulaties uitgevoerd met het pakket DIANA, dat rekent op basis van de eindige-elementenmethode. Het uitgangspunt was een zogeheten basisboog, waarvan telkens één parameter is gevarieerd. Zo is de invloed van die parameter op de bezwijkbelasting bepaald en waren de invloeden van de verschillende parameters naderhand goed met elkaar te vergelijken. Een vergelijking van de resultaten van de uitgevoerde berekeningen met gegevens uit de literatuur<sup>9-11</sup> leerde dat de eindige-elementenberekeningen en de gehanteerde berekeningsmethoden goede resultaten geven.

### Afleiding toetsingsregels

Kuranishi<sup>12</sup> heeft toetsingsregels uit de voorschriften van diverse landen met elkaar vergeleken. Hieruit valt te concluderen dat in de betreffende voorschriften nauwelijks toetsingsregels voor stalen bogen voorhanden zijn. De Duitse DIN 18800 is nog het meest volledig en is in dit onderzoek nader beschouwd. De toetsingsregels in DIN 18800 maken gebruik van de overeenkomst tussen de knikvorm van een halve boog en die van een kolom door een aangepaste kniklengte in de toetsingsregels voor rechte staven toe te passen. Uit de literatuur volgt bovendien dat bij elastische boogknik de normaalkracht op éénvierde van de booglengte nagenoeg gelijk is aan de ideaal-elastische kniklast van de kolom<sup>11,13</sup>. Om de hoeveelheid toetsingsregels in de staalnormen te beperken en om de duidelijkheid en eenduidigheid te waarborgen, is het wenselijk een vergelijkbare toetsingsmethode in NEN 6770 respectievelijk NEN 6771 op te nemen. Uit het hier beschreven onderzoek blijkt

bovendien dat deze methode geschikt is om de stabiliteit in het vlak van een boog te toetsen.

### Voorstel toetsingsregels

Uit het onderzoek is gebleken dat de toetsing van de stabiliteit in het vlak van de boog met betrekking tot knik, overeenkomstig de toetsingsregel in art. 12.3.1.2.1 van NEN 6771, goede resultaten geeft. De toetsingsregel luidt dan:

$$\frac{N_{c;s;d}}{N_{c;u;d}} + \frac{n_y}{n_y - 1} \left( \frac{M_{y;equ;s;d}}{M_{y;u;d}} + \frac{F_{y;tot;s;d} e^*}{M_{y;u;d}} \right) \leq 1$$

Hierin is:

- $N_{c;s;d}$  rekenwaarde van de normaalkracht op éénvierde van de booglengte;
- $N_{c;u;d}$  rekenwaarde van de normaalkracht met betrekking tot de capaciteit in de uiterste grenstoestand volgens NEN 6770, art. 11.2.2;
- $n_y$  verhouding tussen de Eulerkniklast ( $F_{y;E}$ ) en de belasting op de boog;
- $F_{y;tot;s;d}$  som van de normaalkrachten waarvoor de boog de stabiliteit waarborgt;
- $M_{y;equ;s;d}$  rekenwaarde van het equivalente moment om de y-as;
- $M_{y;u;d}$  rekenwaarde van het buigend moment om de y-as met betrekking tot de capaciteit in de uiterste grenstoestand volgens NEN 6770, art. 11.2.3;
- $e^*$  imperfectieparameter.

Voor de verificatie van deze toetsingsregel zijn de resultaten van het numerieke

onderzoek vergeleken met de maximale belasting die volgt uit de toetsingsregel. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de exacte waarden voor de Eulerse kniklast, die volgen uit een elastische berekening van de boog. Bij het bepalen van het equivalente moment ( $M_{y;equ;s;d}$ ) in de toetsing volgens NEN 6771 is er van uitgegaan dat de boog is opgebouwd uit twee staven: van de oplegging tot de nok en van de nok tot de oplegging. De keuze voor dit constructieschema volgt uit de overeenkomst tussen de bezwijkvorm van een rechte staaf en die van een halve boog (zie afbeelding). Er geldt bovendien dat de boog een ongeschoord raamwerk is, zodat  $M_{y;equ;s;d}$  volgt uit art. 12.3.1.2.1 van NEN 6771.

In het onderzoek zijn vier belastinggevallen bekeken (zie afbeelding):

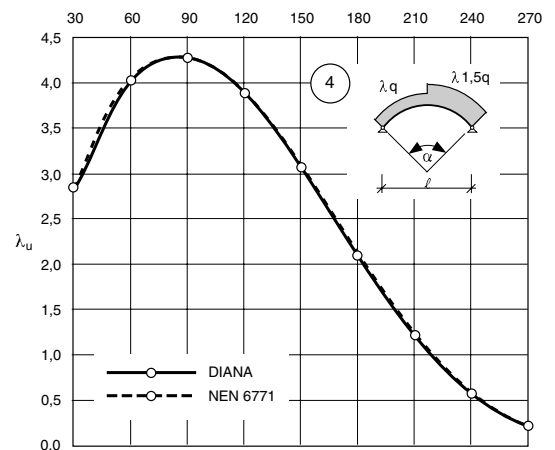
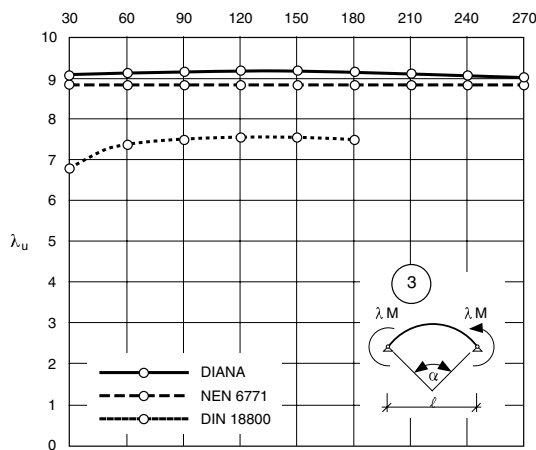
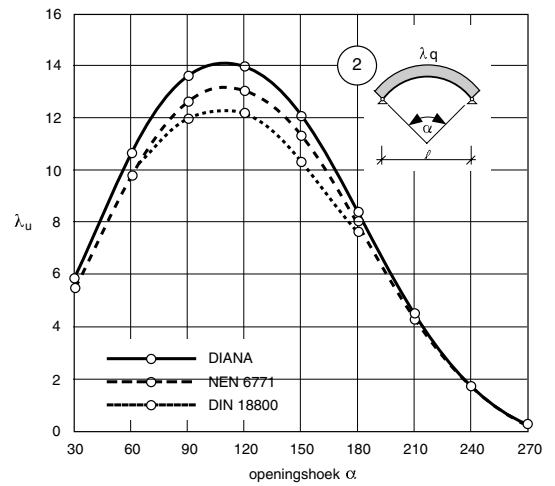
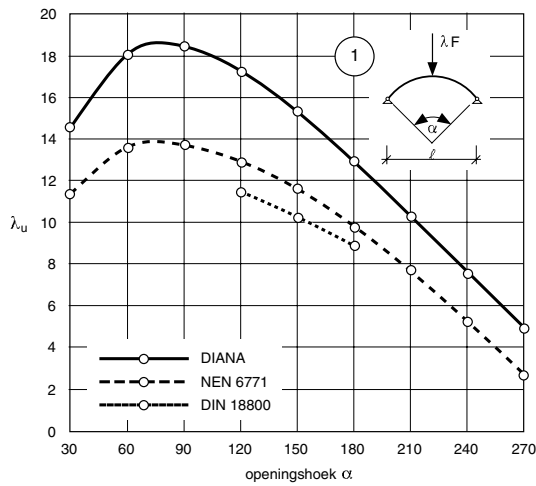
- geconcentreerde belasting in de top;
- gelijkmatig verdeelde belasting;
- momenten ter plaatse van de opleggingen;
- asymmetrisch verdeelde belasting.

De tweede-orde elastisch-plastische bezwijklasten bepaald met DIANA zijn vergeleken met de resultaten van de toetsing volgens NEN 6771 en die volgens DIN 18800. De variabele is hier de openingshoek  $\alpha$  van de bogen.

- Voor bogen met een puntlast in de top bedraagt de uiterste draagkracht volgens de voorgestelde toetsingsregel 75% van de berekende waarde. De Duitse norm is hier niet voor alle configuraties geldig en levert meer conservatieve resultaten op (66%). Voor openingshoeken  $\alpha > 180^\circ$  geeft DIN 18800 geen waarden voor de effectieve kniklengte.

- De resultaten voor op druk belaste

Berekende bezwijkbelasting van de vier onderzochte belastinggevallen als functie van de openingshoek ( $\ell = 10\text{ m}$ , IPE 100) vergeleken met de Nederlandse en Duitse normen.



bogen (met een gelijkmatig verdeelde belasting) komen goed overeen.

- De doorsnedecapaciteit volgens NEN 6770 met betrekking tot buiging is maatgevend voor de toetsing van op buiging belaste bogen. De stabiliteitstoetsing volgens DIN 18800 resulteert echter in een lagere uiterste draagkracht dan de doorsnedetoetsing.

- De bezwijkbelasting van asymmetrisch belaste bogen bepaald volgens NEN 6771 is vrijwel identiek aan de berekende bezwijkbelasting. DIN 18800 is voor dit belastinggeval voor geen enkele beschouwde boogconfiguratie geldig.

Voor andere variabelen dan de openingshoek, met name de profielafmetingen, de overspanning en de verdeling van de belasting, zijn vergelijkbare resultaten gevonden<sup>1</sup>.

Het blijkt dat de voorgestelde toetsingsregel voor knik in het vlak van een scharnierend opgelegde, cirkelvormige stalen boog goed bruikbaar is. In een aantal gevallen is de toetsingsregel soms wat aan de conservatieve kant.

### Kniklengte

De voorgestelde toetsingsregel maakt gebruik van de berekende Eulerse kniklast. Voor bogen met een kleine verhouding tussen de pijl en de overspanning van de boog ( $h/\ell < 0,30$ ) kan de kniklengte acceptabel worden benaderd door de halve booglengte te nemen. Het is echter ook voor andere boogcon-

figuraties wenselijk op vergelijkbare wijze als in DIN 18800 de Eulerse kniklast te bepalen aan de hand van de elastisch effectieve kniklengte. In een grafiek is voor de beschouwde boogconfiguraties de effectieve kniklengtefactor weergegeven als functie van de verhouding tussen de pijl en de overspanning van de boog ( $h/\ell$ ), zodat:

$$F_{y;E} = \frac{\pi^2 E_d I_y}{\left(\beta \frac{1}{2} S\right)^2}$$

ofwel:

$$\ell_{bucy} = \beta \frac{1}{2} S$$

Hierin is:

- $E_d$  elasticiteitsmodulus;
- $I_y$  axiaal kwadratisch oppervlaktemoment (traagheidsmoment) bij buiging om de y-as;
- $\beta$  effectieve kniklengtefactor;
- $S$  booglengte;
- $\ell_{bucy}$  kniklengte van de boog met betrekking tot de y-as.

Met de zo gevonden waarde van  $F_{y;E}$  is de vergrotingsfactor  $(n_y - 1)/n_y$  in de toetsingsregel te benaderen.

### Aanvullende eis

Om te voorkomen dat instabiliteit uit het vlak van de boog een rol speelt, moet de boog voldoende zijn gesteund tegen zijdelingse verplaatsingen. Uitgaande van de ideaal-elastische kniklast

( $F_{y;E}$ ) en de ideaal-elastische torsiekniklast ( $F_{tk;E}$ ) van op zuivere druk belaste bogen volgens Papangelis en Trahair<sup>14</sup>, moet gelden:

$$F_{y;E} \leq F_{tk;E}$$

zodat:

$$\frac{\pi^2 E_d I_y}{\left(\beta \frac{1}{2} S\right)^2} \leq \frac{b^2 (1 - a^2)^2}{a^2 + b^2} F_{z;E}$$

met:

$$a = \frac{a_{st}}{\pi R} \quad \text{en} \quad b = \frac{\pi M_0}{F_{z;E} a_{st}}$$

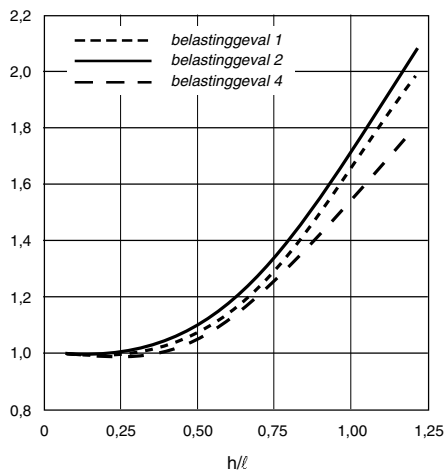
$$M_0 = \sqrt{F_{z;E} \left( G I_t + \frac{\pi^2 E_d I_{wa}}{a_{st}^2} \right)}$$

$$F_{z;E} = \frac{\pi^2 E_d I_z}{a_{st}^2}$$

Hierin is:

- $M_0$  kipmoment van een rechte staaf met lengte  $a_{st}$ ;
- $F_{z;E}$  Euler-knikkracht van een rechte staaf met een lengte  $a_{st}$  met betrekking tot de z-as;
- $G$  afschuivingsmodulus;
- $I_t$  wringingstraagheidsmoment;
- $I_{wa}$  welvingstraagheidsmoment;
- $I_z$  axiaal kwadratisch oppervlaktemoment (traagheidsmoment) bij buiging om de z-as;
- $a_{st}$  afstand tussen de starre steunen;
- $R$  straal tot de neutrale lijn van het boogsegment.





Effectieve kniklengtefactor  $\beta$ .

De minimale stijfheid waarbij de steunen als star mogen worden beschouwd, is te bepalen volgens NEN 6770, art. 12.1.4.2. Voor bogen waarbij echter een groot deel van de belasting door momenten wordt afgedragen, moet nog worden gezocht naar een aanvullende eis ten aanzien van de maximale ongesteunde lengte.

### Conclusies

- Ten aanzien van de stijfheid van stalen bogen gelden de eisen zoals geformuleerd in hoofdstuk 10 van NEN 6702.
- De doorsnedetoetsing volgens NEN 6770 en NEN 6771 kan in de meeste praktische gevallen ook voor bogen worden gebruikt. Er geldt echter een begrenzing voor het toepassingsgebied.
- De huidige rekenmethode en toetsingsregels voor rechte staven in NEN 6770 en NEN 6771 zijn met enkele wijzigingen en/of aanvullingen ook bruikbaar voor in het vlak van de boog belaste, scharnierend opgelegde cirkelvormige bogen die niet gevoelig zijn voor instabiliteit uit het vlak van de boog.

### Literatuur

1. I. Verstappen, *Toetsingsregels voor stalen bogen* (BKO-rapport 96.10, TUE-BKO en TNO-rapport 96-CON-R0623), afstudeeronderzoek TU Eindhoven, Faculteit Bouwkunde BKO, Eindhoven 1996.
2. S.P. Timoshenko en J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, London 1970, p. 65-88.
3. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, 'Flexural torsional buckling of arches', *Journal of*

*Structural Engineering* 112 (1986) 11, p. 2494-2510.

4. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, 'In-plane finite element analysis of arches', *Proceedings Pacific Structural Steel Conference, Auckland, New Zealand, Auckland 1986*, vol. 4, p. 333-350.
5. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, 'Flexural torsional buckling tests on arches', *Journal of Structural Engineering* 113 (1987) 7, p. 1433-1443.
6. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, 'Design of steel arches', *Developments in structural engineering computing*, London 1993, p. 97-102.
7. V.Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, Israel program for scientific translation, Jerusalem 1961 (2e druk), hoofdstuk 12.
8. C.H. Yoo, 'Flexural-torsional stability of curved beams', *Journal of the Engineering Mechanics Division* 108 (1982) EM6, p. 1351-1369.
9. W.J. Austin en T.J. Ross, 'Elastic buckling of arches under symmetrical loading', *Journal of the Structural Division* 112 (1976) ST5, p. 1085-1095.
10. S.P. Timoshenko en J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, New York 1961 (2e druk), p. 278-318.
11. B.G. Johnston (ed.), *Guide to stability design criteria for metal structures*, London 1976 (3e druk), p. 455-487.
12. S. Kuranishi (ed.), 'Arches', in: L.S. Beedle (ed.), *Stability of metal structures. A world view*, uitgave Structural Stability Research Council, 1991 (2e druk), p. 423-445. Te bestellen bij de ECCS in Brussel.
13. T.V. Galambos (ed.), *Guide to stability design criteria for metal structures*, London 1988 (4e druk), p. 575-608.
14. J.P. Papangelis en N.S. Trahair, *Flexural torsional buckling of arches* (Research Report R492), uitgave School of Civil and Mining Engineering, University of Sidney, Sidney 1985.



Voorbeeld van een 'flauwe' boog.

### SG/TC8 Stabiliteit

De technische commissie SG/TC8 (Stabiliteit) van het Staalbouwkundig Genootschap heeft als doel het doen uitvoeren en begeleiden van research op het gebied van stabiliteit van staalconstructies die voor de praktijk relevant is. De commissie is als volgt samengesteld:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| mw.ir. I. van der Bij-Verstappen | Adviesbureau Duisters, Eindhoven              |
| ir. F.S.K. Bijlaard              | TNO Bouw, Rijswijk                            |
| ir. A.W.A.M.J. van de Bogaard    | Auctore Beneficio, Veghel                     |
| J. de Bree                       | Oostingh Staalbouw, Katwijk aan Zee           |
| ing. A.J. van Dongen             | Dienst Stedebouw & Volkshuisvesting Rotterdam |
| ing. C.D. Lucas                  | Gemeentewerken Rotterdam                      |
| ir. J. Naessens                  | Europrofil, Esch-sur-Alzette (L)              |
| ing. M. Regelink                 | DHV Water, Amersfoort                         |
| prof.ir. H.H. Snijder            | Holland Railconsult, Utrecht en TU Eindhoven  |
| ir. C. Speksnijder               | Mercon Steel Structures, Gorinchem            |
| ir. H.M.G.M. Steenberg           | TNO Bouw, Rijswijk                            |
| ing. J.A.M. van Vliet            | ABT, Velp                                     |
| ir. H.J. Vos                     | Iv-Consult Papendrecht                        |