

# Kapconstructie geanalyseerd

Voor de rubriek *Vraag & Antwoord* komen soms vragen binnen waarvan de beantwoording aanleiding is wat dieper op het onderwerp in te gaan. Deze vraag betreft een A-spant voor de kap van een woonhuis. Een dergelijk spant is tegenwoordig een veel gebruikte oplossing als vervanging voor een houten kapconstructie.

De vraag luidde wat de effectieve kniklengte is van het schuine spantbeen. Het softwarepakket van de constructeur gaf namelijk als kniklengte 1,1 maal de systeemplengte, terwijl het pakket van de controlerende gemeente uitkwam op 2 maal de systeemplengte. Dit probleem is op drie manieren aangepakt, namelijk met de computer, volgens een methode in een Duitse publikatie en volgens NEN 6770.



De constructie betreft een kaspant in de vorm van een A met twee korte, verticale stijlen voor de borstwering. Alle staven hebben dezelfde doorsnede (aangenomen is een profiel IPE 200): dat wil zeggen dat de oppervlakte en het traagheidsmoment van alle staven gelijk is. Verder wordt het spant belast door een puntlast in de top (*afb. 1*). Dat is voor de stabiliteit van het spant een conservatieve aanname, omdat de normaalkrachten dan zo zijn verdeeld dat in alle gedrukte staven ongeveer even grote krachten ontstaan (*afb. 2*). De lengte van het verticale spantbeen is klein ten opzichte van de andere afmetingen van het spant.

Bij afwezigheid van het verticale spantbeen moet op grond van symmetrie de kniklengte van het schuine spantbeen gelijk zijn aan de systeemplengte (*afb. 3a*) [1]. Zijn de verticale spantbenen wel aanwezig, dan kan het spant zich in zijdelingse richting verplaatsen en wordt de kniklengte groter (*afb. 3b*). Hoeveel de kniklengte toeneemt, hangt af van de stijfheidsverhoudingen: is het verticale spantbeen zeer stijf, dan mag worden verwacht dat de kniklengte niet veel groter is dan de systeemplengte.

Een complicerende factor is dat het verticale spantbeen, dat steun verleent aan het schuine spantbeen, zelf onder druk staat. Omgekeerd wordt het schuine spantbeen gesteund door het verticale spant-

been, dat zelf ook wordt gedrukt. De berekening van de kniklengte van het schuine spantbeen wordt volgens drie methoden uitgevoerd, namelijk:

- met de computer;
- volgens een methode uit een Duitse publikatie;
- volgens NEN 6770.

## Computerberekening

Gekozen is voor het computerprogramma Ansys (versie 5.1), dat in staat is de Eulerse kniklast van het spant als geheel te bepalen. De gebruikte rekenmethode is een uitbreiding van een eerste-orde elastische rekenmethode. Het knikken van het raamwerk wordt daarbij geformuleerd als een numeriek eigenwaardeprobleem. De oplossing hiervan geeft een knikvorm die is weergegeven in *afbeelding 4*. De bijbehorende laagste eigenwaarde is de Eulerse kniklast van het raamwerk en bedraagt  $F_E = 1379,2$  kN.

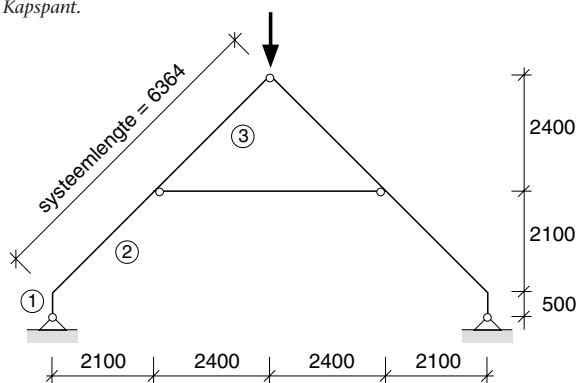
De bijbehorende normaalkrachten zijn weergegeven in *afbeelding 2*. Door nu deze normaalkrachten per staaf ( $N_E$ ) op te vatten als de normaalkracht waarbij de staaf Eulers instabiel wordt, is de kniklengte te berekenen volgens:

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell_{buc}^2} \Rightarrow \ell_{buc} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{N_E}}$$

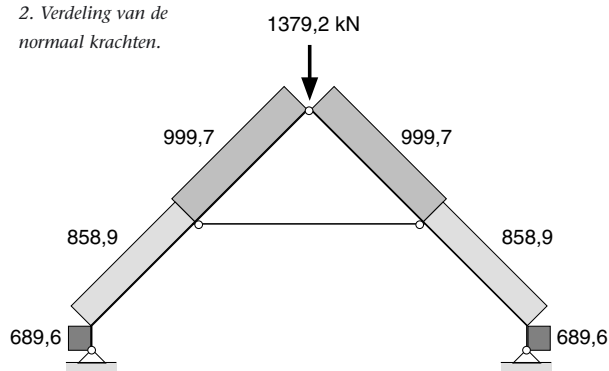
prof.ir. H.H. Snijder

Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit  
Bouwkunde en Holland Railconsult, Utrecht

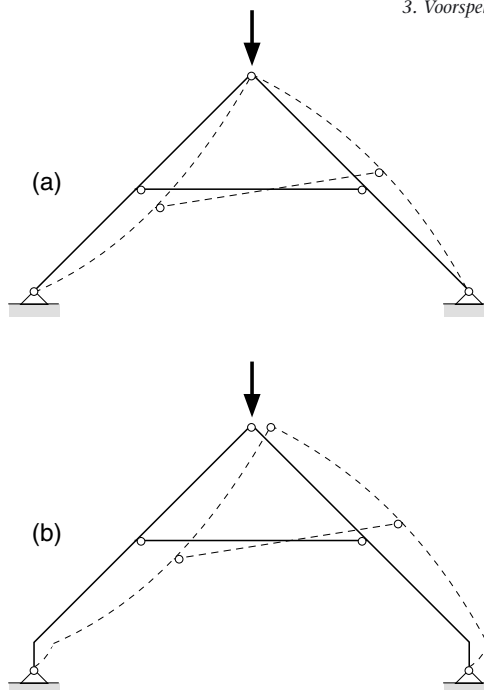
### 1. Kapsant.



### 2. Verdeling van de normaal krachten.



### 3. Voorspelde knikvormen.



Dit leidt voor de drie verschillende staven tot de volgende kniklengten:

$$\ell_{buc,1} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4}{689,6 \cdot 10^3}} = 7642 \text{ mm}$$

$$\ell_{buc,2} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4}{858,9 \cdot 10^3}} = 6847 \text{ mm}$$

$$\ell_{buc,3} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4}{999,7 \cdot 10^3}} = 6347 \text{ mm}$$

De grootste kniklengte is die van het verticale spantbeen, namelijk  $\lambda_{buc,1} = 7642$  mm. De grootste kniklengte van het schuine spantbeen bedraagt  $\lambda_{buc,2} = 6847$  mm  $= (6847/6364) \lambda_{sys} = 1,08 \lambda_{sys}$ .

### Duitse publikatie

Voor driescharnierspanten is een Duitse publikatie beschikbaar, waarmee handmatig de kniklengte van het kapsant kan worden bepaald [2]. De methode maakt gebruik van de differentiaalvergelijking van het evenwicht in vervormde toestand. De kniklengte is af te lezen uit een tabel (tabel 1), indien de twee kentallen  $\delta$  en  $\gamma$  van het spant bekend zijn. In deze kentallen zijn de normaalkracht, het traagheidsmoment en de lengte van

de verticale en schuine spantbenen verwerkt. Deze twee kentallen zijn (notaties aangepast aan NEN 6770):

$$\delta = \frac{I_{cln} \ell_{bm}}{I_{bm} \ell_{cln}} = \frac{1943 \cdot 10^4 \cdot 6364}{1943 \cdot 10^4 \cdot 500} = 12,728$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\delta \cdot N_{bm} \ell_{bm}}{N_{cln} \ell_{cln}}} = \sqrt{12,728 \cdot \frac{858,9 \cdot 6364}{689,6 \cdot 500}} = 14,205$$

Deze kentallen vallen voor dit voorbeeld echter buiten het bereik van tabel 1. Ze zijn in elk geval zo groot, dat ze leiden tot getallen rechtsonder in de tabel, waar de kniklengte van het verticale spantbeen (bovenste getal) groot is en de kniklengte van het schuine spantbeen (onderste getal) nadert tot de systeemlengte. Op grond van de formules volgens [2], waarop ook de tabel is gebaseerd, wordt voor beide spantbenen gevonden:

$$\ell_{buc,verticaal} = 15,16 \ell_{sys} = 15,16 \cdot 500 = 7580 \text{ mm}$$

$$\ell_{buc,schuin} = 1,07 \ell_{sys} = 1,07 \cdot 6364 = 6809 \text{ mm}$$

### NEN 6770

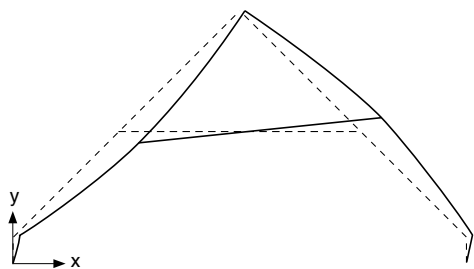
De rekenregels in NEN 6770 voor het bepalen van de kniklengte zijn bedoeld voor staven in orthogonale raamwerken en zijn minder geschikt voor constructies zoals het gegeven kapsant. Indien de kniklengte toch met NEN 6770 wordt bepaald, is het nodig de inklemingsparameters C te bepalen (art. 12.1.1.3). Dit kan bijvoorbeeld worden gedaan door een zodanige belasting op het kapsant aan te brengen dat een eerste-orde uitbuigvorm optreedt die zo goed mogelijk overeenkomt (affien is) met de werkelijke knikvorm (afb. 5). Bij een horizontale eenheidslast in de top van het spant volgt de parameter C ter plaatse van de knie uit  $C = EI/k_{\phi} \ell$ . Ter plaatse van het top- en voetscharnier geldt  $C = \infty$ . Het verticale spantbeen kan nu worden opgevat als een kolom in een ongeschoord raamwerk, met:

$$C_A = \infty$$

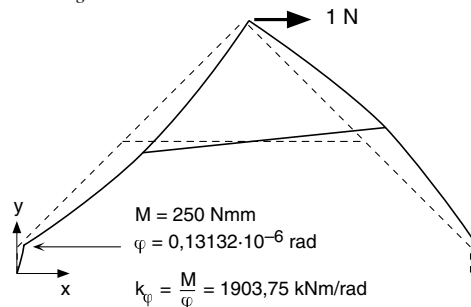
$$C_B = \frac{EI}{k_{\phi} \ell} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 1943 \cdot 10^4}{1903,75 \cdot 10^6 \cdot 500} = 4,29$$

Met deze waarden volgt uit het nomogram in figuur 41 van NEN 6770:  $\lambda_{buc} = 7 \lambda_{sys} = 7 \cdot 500 = 3500$  mm. Voor het schuine spantbeen kan een bijbehorende waarde worden afgeleid:  $\lambda_{buc} = 3136$  mm [3]. Bij deze benadering wordt de

4. Berekende knikvorm.



5. Uitbuigvorm.



invloed van de normaalkracht op de steun die het schuine spantbeen aan het verticale spantbeen (en omgekeerd) levert, niet in rekening gebracht. Vandaar dat de resultaten nogal afwijken van de uitkomsten van de andere twee methoden.

### Vergelijk

De resultaten van de drie analyses zijn samengevat in tabel 2. De resultaten van de computerberekening met de eigenwaarde-analyse komen goed overeen met die van de methode uit de Duitse publikatie. Deze methode is gebaseerd op de differentiaalvergelijking van het evenwicht in vervormde toestand. De resultaten volgens NEN 6770 wijken hier nogal van af. Bij de berekening van de kniklengten volgens de eerste twee methoden wordt de invloed van de normaalkracht in de steunverlenende staven correct in rekening gebracht. Bij de berekening volgens NEN 6770 is dit niet het geval, wat tot een onveilige benadering leidt voor de kniklengte van de spantbenen. Het softwarepakket van de constructeur gaf een kniklengte die vrijwel overeenkomt met de gevonden waarde in dit artikel.

Tabel 1. Toeslagfactoren op de systeemplengte voor het bepalen van de kniklengte van driescharnierspanen [2]. Het bovenste getal geldt voor het verticale spantbeen; het onderste getal voor het schuine spantbeen.

| factor $\delta$ | factor $\gamma$ |        |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-----------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 | 0,000           | 0,500  | 1,000 | 1,500 | 2,000 | 2,500 | 3,000 | 4,000 | 6,000 | 8,000 |
| 0,200           | 2,133           | 2,138  | 2,156 | 2,205 | 2,347 | 2,672 | 3,109 | 4,064 | 6,037 | 8,026 |
| 0,600           | 2,391           | 4,276  | 2,156 | 1,470 | 1,174 | 1,069 | 1,036 | 1,016 | 1,006 | 1,003 |
|                 |                 | 4,805  | 2,440 | 1,681 | 1,340 | 1,179 | 1,105 | 1,048 | 1,019 | 1,010 |
| 1,000           | 2,633           | 2,649  | 2,695 | 2,786 | 2,943 | 3,185 | 3,511 | 4,325 | 6,188 | 8,134 |
|                 |                 | 5,298  | 2,695 | 1,858 | 1,471 | 1,274 | 1,170 | 1,081 | 1,031 | 1,017 |
| 1,500           | 2,917           | 2,933  | 2,984 | 3,078 | 3,229 | 3,448 | 3,710 | 4,489 | 6,281 | 8,202 |
|                 |                 | 5,867  | 2,984 | 2,052 | 1,614 | 1,379 | 1,247 | 1,122 | 1,047 | 1,025 |
| 2,000           | 3,179           | 3,196  | 3,247 | 3,311 | 3,485 | 3,689 | 3,956 | 4,651 | 6,382 | 8,271 |
|                 |                 | 6,391  | 3,247 | 2,227 | 1,742 | 1,475 | 1,319 | 1,163 | 1,064 | 1,034 |
| 2,500           | 3,423           | 3,439  | 3,491 | 3,583 | 3,720 | 3,912 | 4,160 | 4,811 | 6,481 | 8,340 |
|                 |                 | 6,879  | 3,491 | 2,388 | 1,860 | 1,565 | 1,387 | 1,203 | 1,080 | 1,043 |
| 3,000           | 3,652           | 3,668  | 3,719 | 3,808 | 3,940 | 4,121 | 4,354 | 4,968 | 6,580 | 8,411 |
|                 |                 | 7,336  | 3,719 | 2,539 | 1,970 | 1,649 | 1,451 | 1,242 | 1,097 | 1,051 |
| 3,500           | 3,868           | 3,884  | 3,934 | 4,020 | 4,147 | 4,320 | 4,540 | 5,122 | 6,680 | 8,481 |
|                 |                 | 7,768  | 3,934 | 2,680 | 2,074 | 1,728 | 1,513 | 1,281 | 1,113 | 1,060 |
| 4,000           | 4,073           | 4,089  | 4,137 | 4,221 | 4,344 | 4,509 | 4,719 | 5,273 | 6,781 | 8,553 |
|                 |                 | 8,178  | 4,137 | 2,814 | 2,172 | 1,804 | 1,573 | 1,318 | 1,130 | 1,069 |
| 4,500           | 4,268           | 4,284  | 4,332 | 4,413 | 4,531 | 4,690 | 4,891 | 5,421 | 6,881 | 8,625 |
|                 |                 | 8,568  | 4,332 | 2,942 | 2,266 | 1,876 | 1,630 | 1,355 | 1,147 | 1,078 |
| 5,000           | 4,456           | 4,471  | 4,517 | 4,597 | 4,711 | 4,864 | 5,057 | 5,565 | 6,982 | 8,697 |
|                 |                 | 8,942  | 4,517 | 3,064 | 2,356 | 1,945 | 1,686 | 1,391 | 1,164 | 1,087 |
| 5,500           | 4,636           | 4,651  | 4,696 | 4,773 | 4,884 | 5,031 | 5,217 | 5,707 | 7,082 | 8,769 |
|                 |                 | 9,301  | 4,696 | 3,182 | 2,442 | 2,013 | 1,739 | 1,427 | 1,180 | 1,096 |
| 6,000           | 4,809           | 4,824  | 4,868 | 4,943 | 5,051 | 5,193 | 5,373 | 5,846 | 7,183 | 8,842 |
|                 |                 | 9,647  | 4,868 | 3,295 | 2,525 | 2,077 | 1,791 | 1,461 | 1,197 | 1,105 |
| 6,500           | 4,976           | 4,991  | 5,034 | 5,107 | 5,212 | 5,351 | 5,525 | 5,982 | 7,283 | 8,915 |
|                 |                 | 9,981  | 5,034 | 3,405 | 2,606 | 2,140 | 1,842 | 1,493 | 1,214 | 1,114 |
| 7,000           | 5,138           | 5,152  | 5,195 | 5,266 | 5,368 | 5,503 | 5,672 | 6,115 | 7,382 | 8,989 |
|                 |                 | 10,305 | 5,195 | 3,511 | 2,684 | 2,201 | 1,891 | 1,529 | 1,230 | 1,124 |
| 7,500           | 5,296           | 5,309  | 5,351 | 5,420 | 5,520 | 5,651 | 5,815 | 6,216 | 7,481 | 9,062 |
|                 |                 | 10,619 | 5,351 | 3,614 | 2,760 | 2,260 | 1,938 | 1,561 | 1,247 | 1,133 |
| 8,000           | 5,448           | 5,462  | 5,502 | 5,570 | 5,668 | 5,796 | 5,955 | 6,374 | 7,580 | 9,136 |
|                 |                 | 10,923 | 5,502 | 3,714 | 2,834 | 2,318 | 1,985 | 1,593 | 1,263 | 1,142 |

Tabel 2. Samenvatting van de gevonden kniklengten [mm].

| methode            | spantbeen |           |
|--------------------|-----------|-----------|
|                    | schuin    | verticaal |
| computerberekening | 6847      | 7642      |
| Duitse publikatie  | 6809      | 7580      |
| NEN 6770           | 3136      | 3500      |

### Literatuur

- H. H. Snijder, 'Hoe moet de kniklengte worden bepaald van een gedrukte staaf die wordt gesteund door een andere gedrukte staaf', *Bouwen met Staal 69* (1984), p. 13-14.
- H. P. Rieckmann, 'Knicklängenbeiwerte für Zweigelenrahmen mit Druckkräften im Riegel', *Der Stahlbau 51* (1982) 2, p. 41-43.
- 'Rekenvoorbeeld 6. Driescharnierspant', in: *Introductie van en rekenen met nieuwe normen: TGB-1990 Staal en EC-3, cursusdictaat*, uitgave Staalbouwkundig Genootschap, Rotterdam 1993, p. 6.1-6.21.